



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ

24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

FIÇI TİPİ DOĞRUSAL VİSKOELASTİK HELİSLERİN DİNAMİK DAVRANIŞI

Nihal Eratlı¹, Merve Ermiş², Hakan Argeşo³, Akif Kutlu⁴ ve Mehmet H. Omurtag⁵^{1,2,4,5}İTÜ İnşaat Fakültesi, İstanbul³Atılım Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Ankara

ABSTRACT

In this study, the effects of viscoelastic parameters on the dynamic behavior of a linear viscoelastic circular cross-sectioned barrel type helix is investigated by using the mixed finite element method based on the Timoshenko beam theory. The helix is assumed to be fixed from both ends and subjected to dynamic step type of vertical distributed loading. The linear viscoelastic material exhibits standard type of distortional behavior and Kelvin type of bulk compressibility, and, the material properties are implemented into the formulation through the use of the correspondence principle. The solutions of the helix problem are obtained in the Laplace space and the results are transformed back to the time domain numerically by means of the Modified Durbin's transformation algorithm. Numerical results for the dynamic behavior of linear viscoelastic barrel type helix are discussed extensively.

ÖZET

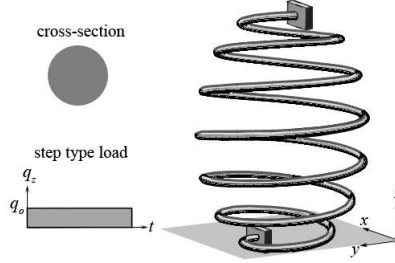
Bu çalışmada, viskoelastik parametrelerin dairesel kesitli fiçı (barrel) tipi doğrusal viskoelastik helislerin dinamik davranışı üzerindeki etkileri Timoshenko çubuk kuramını esas alan bir karışık sonlu eleman algoritması kullanılarak incelenmiştir. Helisin iki ucundan tutulu ve dinamik olarak adım tipinde düzgün yayılı yük etkisinde olduğu varsayılmıştır. Doğrusal viskoelastik malzemede, kayma şekil değiştirmelerinin standart modele ve hacimsel şekil değiştirmelerinin ise Kelvin modele uygun davranış gösterdiği kabul edilmiş ve karşılıklı ilkesi kullanılarak malzeme özellikleri çözüm algoritmasına eklenmiştir. Helis probleminin çözümü Laplace uzayında gerçekleştirilmiş ve sonuçlar geliştirilmiş Durbin dönüşüm algoritması kullanılarak zaman uzayına taşınmıştır. Doğrusal viskoelastik fiçı tipi helislerin dinamik davranışına ait sayısal sonuçlar detaylı olarak irdelenmiştir.

GİRİŞ

Helislerin dinamik davranışı önemli mühendislik problemlerinden biridir ve analizlerde viskoelastik davranışın dikkate alınması önemlidir. Literatür incelendiğinde doğrusal ve dairesel viskoelastik çubukların daha yoğunluklu olarak çalışıldığı [1-9], viskoelastik helislere ait çalışmaların [10-12] sayıca daha az olduğu gözlenmiştir.

Bu çalışmada, iki ucundan tutulu, düşeyde düzgün yayılı yükün etkisindeki doğrusal viskoelastik fiçı tipi helisel çubuk problemi ele alınmıştır. Doğrusal viskoelastik malzeme, kayma şekil değiştirmelerinin standart ve hacimsel şekil değiştirmelerinin ise Kelvin modeline uygun davranış gösterdiği kabul edilerek tanımlanmıştır. Viskoelastik davranışın modellenmesinde kullanılan parametrelerin dinamik davranış üzerindeki etkilerinin

araştırıldığı sayısal uygulamada, helisel çubuğun kesit alanının dairesel olduğu ve yayılı yükün adım tipinde olduğu kabul edilmiştir (Şekil 1). Timoshenko çubuk kuramını esas alan, dönel eylemsizlik etkilerinin de dahil edildiği bir karışık sonlu eleman algoritması kullanılarak problem Laplace uzayında çözülmüş ve sonuçlar geliştirilmiş Durbin algoritması [13-15] kullanılarak zaman uzayına taşınmıştır. Viskoelastik parametrelerinin fıçı tipi helislerin dinamik davranışı üzerindeki etkileri detaylı olarak incelenmiş ve literatüre katkı sağlanmıştır.



Şekil 1. Fıçı tipi helis

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Helis Geometrisi: Helislerin geometrik özellikleri, $R(\varphi)$ helis tabanında başlangıç noktasından ölçülen φ açısına bağlı helisin eksen geometrinin yarıçapı, α yükselme açısı, $p(\varphi)$ helisin birim radyana gelen yükselme değeri olmak üzere

$$x = R(\varphi) \cos \varphi, \quad y = R(\varphi) \sin \varphi, \quad z = p(\varphi) \varphi, \quad p(\varphi) = R(\varphi) \tan \alpha \quad (1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Fıçı (barrel) tipi helis için R_{\min} ve R_{\max} sırasıyla helisin taban ve merkez yarıçapları ve n tur sayısı olmak üzere, helisin keyfi bir noktasına ait eksen yarıçapı

$$R(\varphi) = R_{\min} + (R_{\max} - R_{\min}) \left(1 - \frac{\varphi}{n\pi}\right)^2 \quad (2)$$

ile ifade edilebilir.

Alan denklemleri ve fonksiyonel: Timoshenko çubuk kuramına dayalı alan denklemleri Laplace uzayına taşındıktan sonra aşağıdaki yapıda yazılır [12]:

$$\begin{aligned} -\bar{\mathbf{T}}_{,s} - \bar{\mathbf{q}} + \rho A z^2 \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \\ -\bar{\mathbf{M}}_{,s} - \mathbf{t} \times \bar{\mathbf{T}} - \bar{\mathbf{m}} + \rho \mathbf{I} z^2 \bar{\boldsymbol{\Omega}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{,s} + \mathbf{t} \times \bar{\boldsymbol{\Omega}} - \bar{\mathbf{C}}_{\gamma} \bar{\mathbf{T}} &= \mathbf{0} \\ \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{,s} - \bar{\mathbf{C}}_{\kappa} \bar{\mathbf{M}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4)$$

z Laplace dönüşüm parametresi olmak üzere (3) ve (4) de yer alan, Laplace uzayında ve Frenet koordinat sisteminde tanımlanmış vektörel büyüklükler $\bar{\mathbf{u}} (\bar{u}_t, \bar{u}_n, \bar{u}_b)$ yer değiştirme, $\bar{\boldsymbol{\Omega}} (\bar{\Omega}_t, \bar{\Omega}_n, \bar{\Omega}_b)$ dönme, $\bar{\mathbf{T}} (\bar{T}_t, \bar{T}_n, \bar{T}_b)$ kuvvet ve $\bar{\mathbf{M}} (\bar{M}_t, \bar{M}_n, \bar{M}_b)$ moment, $\mathbf{I} (I_t, I_n, I_b)$ eylemsizlik momenti, $\bar{\gamma}$ birim kayma, $\bar{\kappa}$ birim dönme, $\bar{\mathbf{C}}_{\gamma}$, $\bar{\mathbf{C}}_{\kappa}$ kompiyans matrisleri, $\bar{\mathbf{q}}$ ve $\bar{\mathbf{m}}$ yayılı yük ve momenttir. Ayrıca, ρ malzeme yoğunluğu ve A kesit alanıdır. (3) ve (4) kullanılarak denklemler operatör formda yazılır ve operatörün potansiyel olduğu ispatlandıktan sonra Laplace uzayındaki fonksiyonel aşağıdaki gibi elde edilir [12].

$$\bar{\mathbf{I}}(\bar{\mathbf{y}}) = -[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}_{,s}] + [\mathbf{t} \times \bar{\mathbf{\Omega}}, \bar{\mathbf{T}}] - [\bar{\mathbf{M}}_{,s}, \bar{\mathbf{\Omega}}] - \frac{1}{2}[\mathbf{C}_\kappa \bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{M}}] - \frac{1}{2}[\mathbf{C}_\gamma \bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{T}}] \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \rho A z^2 [\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}] + \frac{1}{2} \rho z^2 [\mathbf{I} \bar{\mathbf{\Omega}}, \bar{\mathbf{\Omega}}] - [\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{u}}] - [\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{\Omega}}] \\ &+ [(\bar{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}}), \bar{\mathbf{u}}]_\sigma + [(\bar{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{M}}), \bar{\mathbf{\Omega}}]_\sigma + [\hat{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}]_\epsilon + [\hat{\mathbf{\Omega}}, \bar{\mathbf{M}}]_\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Karışık sonlu eleman algoritması: İki düğüm noktalı eğrisel çubuk elemanı kullanılmış, iki düğüm noktası arasındaki merkez açısı $\Delta\varphi = (\varphi_j - \varphi_i)$ olmak üzere, şekil fonksiyonları $\phi_i = (\varphi_j - \varphi) / \Delta\varphi$ ve $\phi_j = (\varphi - \varphi_i) / \Delta\varphi$ şeklinde alınmıştır. 2×12 serbestlik derecesine sahip eğrisel çubuk elemanın her bir düğüm noktasında Frenet koordinat sisteminde tanımlanmış değişkenlere ait vektörler $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{\Omega}}, \bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{M}}$ dir.

Viskoelastik model: Doğrusal viskoelastik malzemeye ait alan denklemleri karşılıklı ilkesi kullanılarak elde edilebilir [16]. Karşılıklı ilkesine göre Laplace dönüşüm uzayındaki viskoelastik alan denklemleri, aynı uzaydaki elastik alan denklemlerinde görünen elastik sabitlerin, seçilen malzeme modeline göre, sanal karşılıklarıyla değiştirilmesiyle elde edilebilir. Kayma şekil değiştirmelerinin standart modele uygun davranış gösterdiği kabul edildiğinde sanal kayma modülü

$$\bar{G} = G \left[\frac{1 + \beta^G \tau_r^G z}{1 + \tau_r^G z} \right] ; \quad \beta^G = G_g / G > 1 \quad (6)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada τ_r^G , G ve G_g parametreleri, sırasıyla, kayma davranışı ile ilişkilendirilmiş gevşeme fonksiyonuna ait olan gecikme zamanını, denge ve anlık değerleri ifade eder [17,18]. Hacimsel şekil değiştirmelerin Kelvin modeline uygun davranış gösterdiği kabul edildiğinde sanal hacimsel modül

$$\bar{K} = K [1 + z \tau_r^K] \quad (7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Yukarıda, τ_r^K ve K parametreleri, sırasıyla, hacimsel şekil değiştirme davranışı ile ilişkilendirilmiş sünme fonksiyonuna ait gecikme zamanı ve denge değerlerini ifade eder.

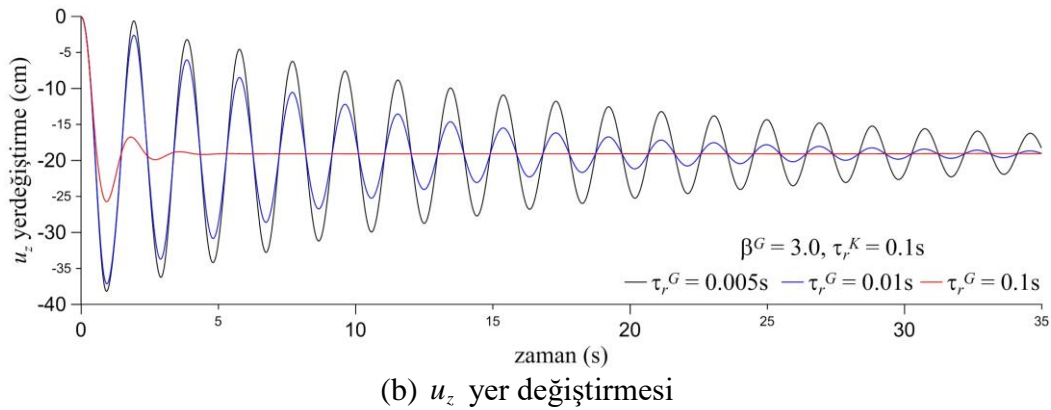
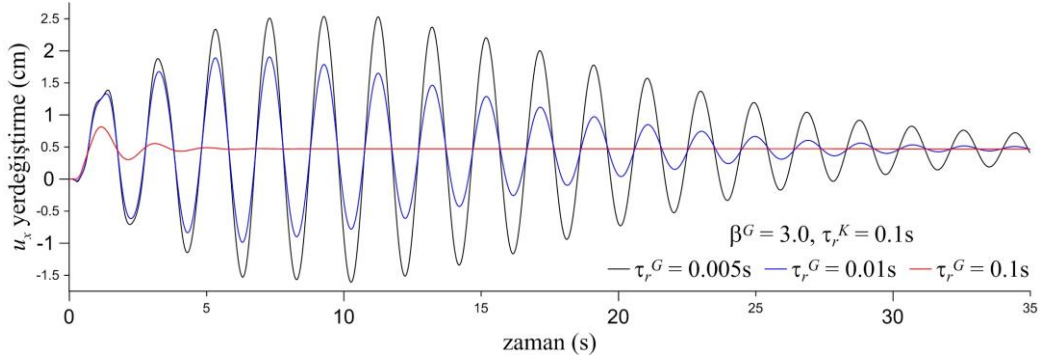
Sayısal ters Laplace dönüşüm algoritması: Bu çalışma için önerilen viskoelastik modele ait malzeme bilgileri [12] de doğrulaması gerçekleştirilen karışık sonlu eleman algoritmasına eklenmiş ve Laplace uzayında çözüm gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar, daha sonra sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemlerinden biri olan geliştirilmiş Durbin algoritması [12-15] kullanılarak zaman uzayına geri taşınmıştır.

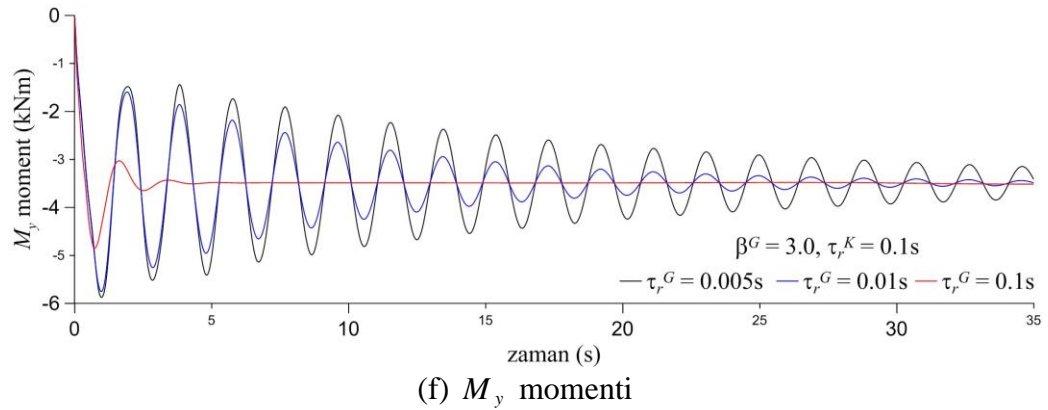
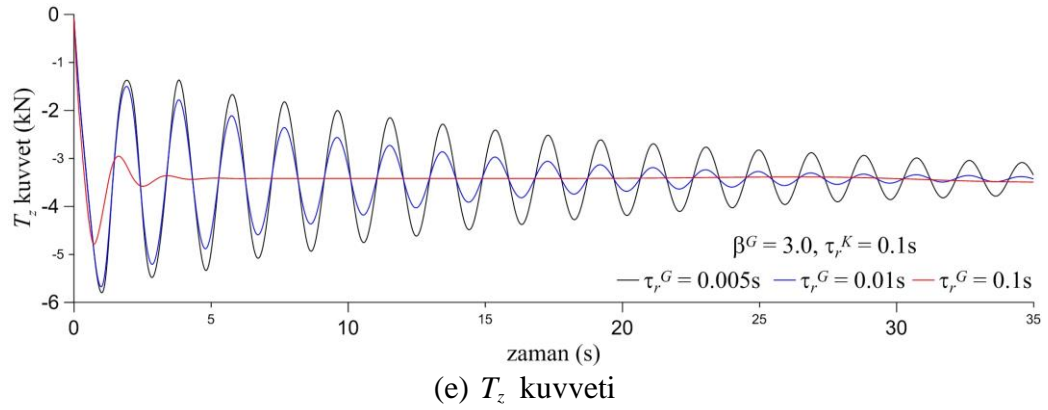
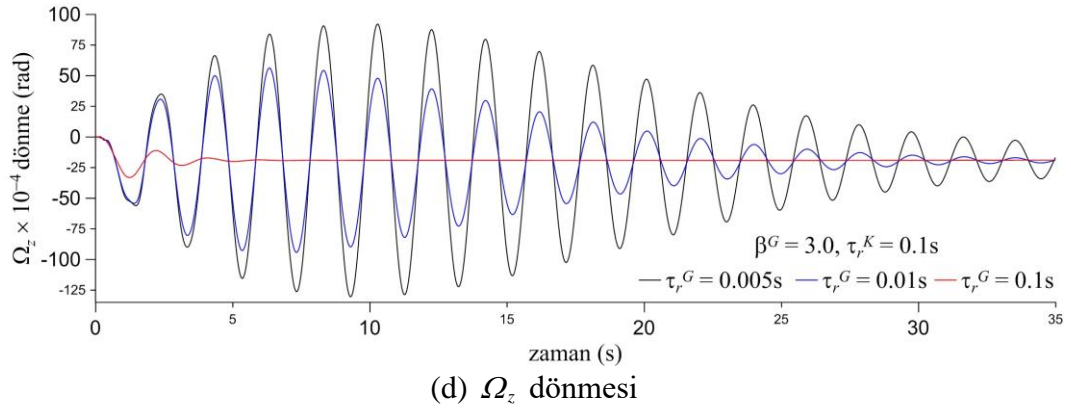
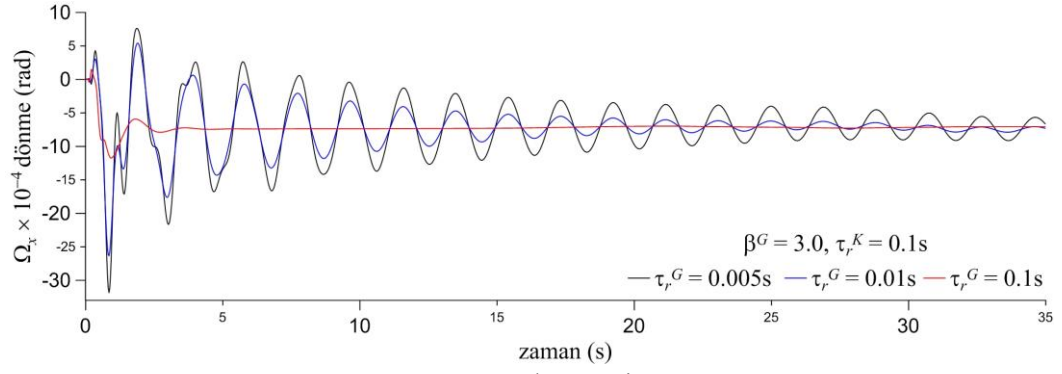
SAYISAL SONUÇLAR

İki ucundan tutulu, düzgün yayılı etkiyen etkisinde doğrusal viskoelastik fıçı tipi helisel çubuk probleminin çözümünde kullanılan helis geometrisi ve malzemeye ait bilgiler sırasıyla şöyle özetlenebilir: Tur sayısı $n = 6.5$, düşey helis yüksekliği $H = 4$ m, helisin en küçük yarıçapının, en büyük yarıçapa oranı $R_{\min} / R_{\max} = 0.5$ ($R_{\max} = 2$ m). Dolu daire kesitin çapı $D = 10$ cm, kayma modülü $G = 80$ GPa, hacimsel elastisite modülü $K = 175$ GPa, malzeme yoğunluğu $\rho = 7850$ kg/m³. Viskoelastik davranışı tanımlayan parametreler sırasıyla, $\tau_r^G = 0.005$ s; 0.01 s; 0.1 s, $\beta^G = 1.1$; 1.5; 3.0, $\tau_r^K = 0.0$; 0.1 s; 0.5 s; 1.0 s dir. τ_r^G , β^G ve τ_r^K değerleri **Error! Reference source not found.** ve **Error! Reference source not found.** de kullanılarak kayma (\bar{G}) ve hacimsel elastisite (\bar{K}) modüllerinin sanal karşılıkları hesaplanır. Adım tipi olarak etkidığı kabul edilen $q = q_z(t)$ yayılı yükünün şiddeti $q_o = 100$ N/m dir.

Helis probleminin çözümü Laplace uzayında gerçekleştirildiği için, sonuçların zaman uzayına taşınmasında kullanılan geliştirilmiş Durbin algoritması için gerekli parametreler $aT = 6$ ve $N = 2^{11}$ olarak alınmıştır. Helisel çubuğun orta noktasındaki yer değiştirmeler (u_x , u_z) ve dönmeler (Ω_x , Ω_z) ile çubuğun tutulu ucundaki kuvvet (T_z) ve moment (M_y) büyüklüklerinin zaman içindeki davranışları $0 \leq t \leq 35$ s aralığında incelenmiştir. 100 eleman kullanılarak elde edilen, viskoelastik parametrelerin incelendiği sonlu eleman sonuçları Şekil 2-4 de grafiklerle verilmiş ve ayrıntılı olarak da aşağıdaki şekilde açıklanmıştır.

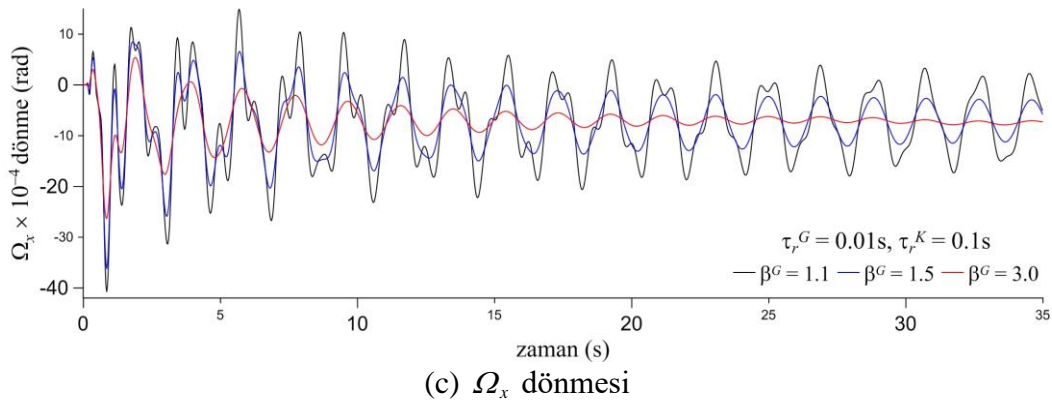
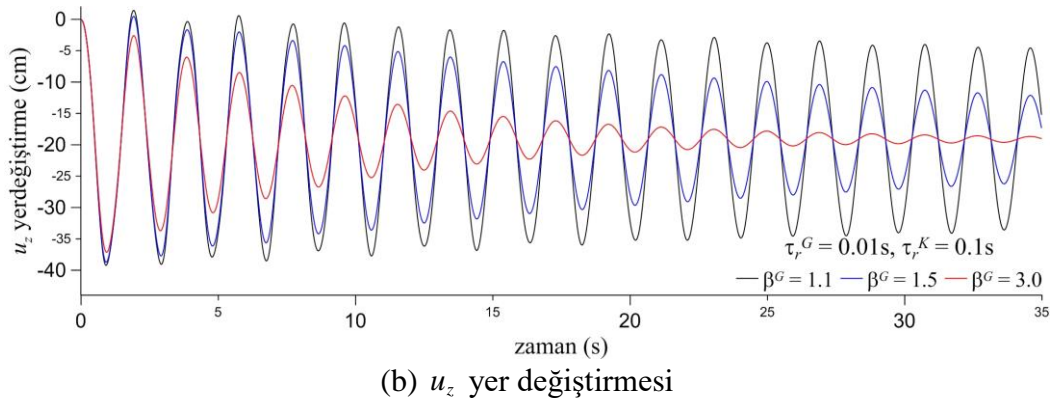
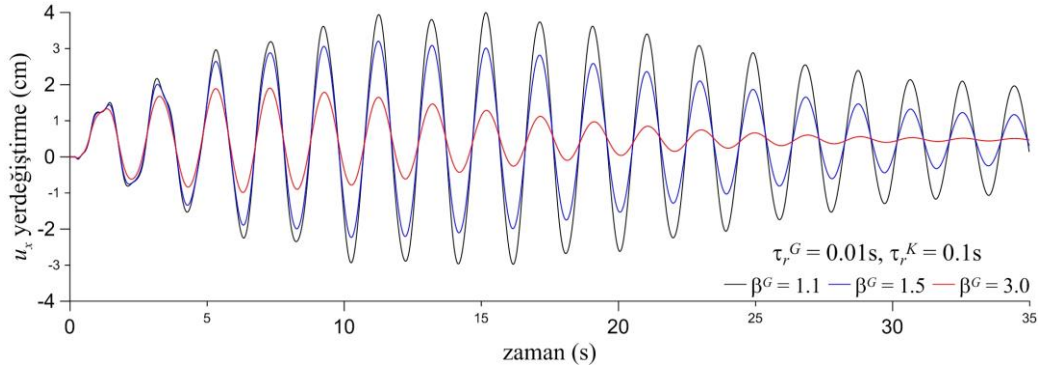
- $\tau_r^K = 0.1$ s ve $\beta^G = 3.0$ olmak üzere, kayma modülü ile ilişkilendirilmiş farklı gecikme zamanı değerleri $\tau_r^G = 0.005$ s; 0.01 s; 0.1 s alınarak, τ_r^G nin fıçı tipi helisin dinamik davranışı üzerindeki etkisi incelenmiş, yer değiştirme (u_x , u_z) ve dönme (Ω_x , Ω_z) ile çubuğun tutulu ucundaki kuvvet (T_z) ve moment (M_y) büyüklüklerinin zamana bağlı davranışları grafik olarak Şekil 2 de verilmiştir. Kayma şekil değiştirmeleriyle ilgili viskoz etki arttıkça, yani τ_r^G değerleri büyüdükçe hareketin daha hızlı sönümlendiği, titreşim hareketinin genliğinin azaldığı ve kuazi-statik duruma yaklaştığı gözlenmiştir.

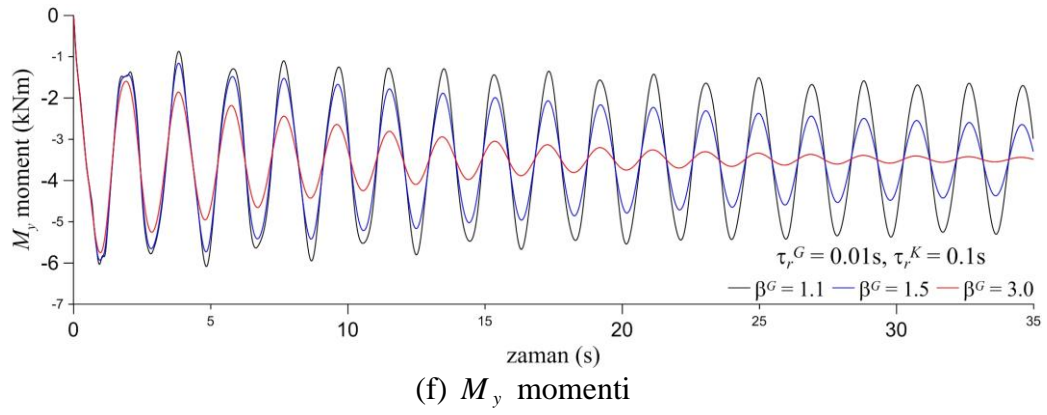
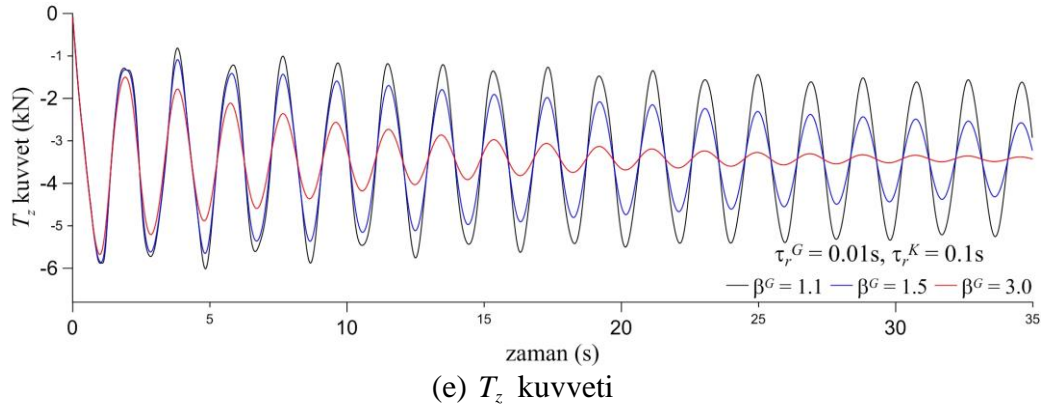
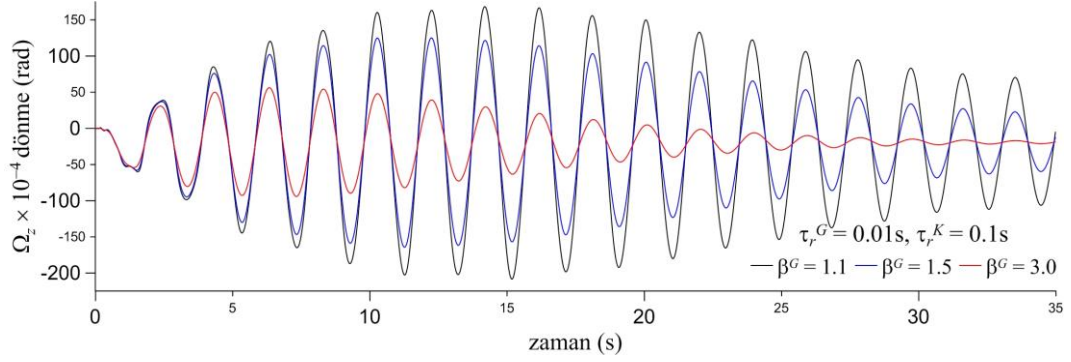




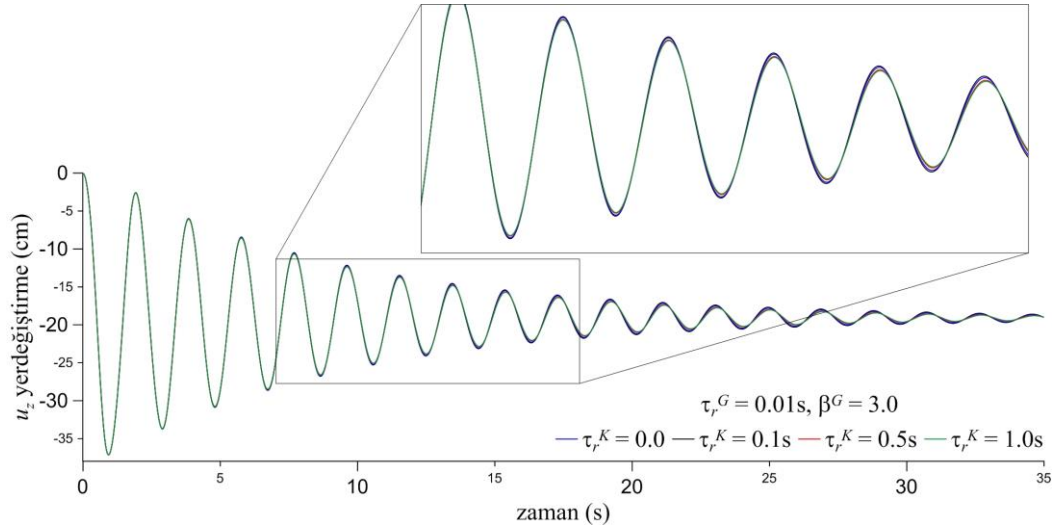
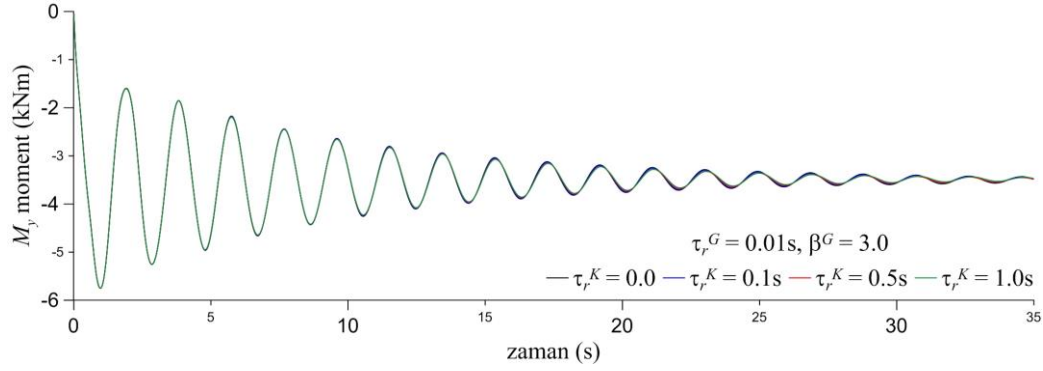
Şekil 2. τ_r^G nin dinamik davranış üzerindeki etkisi

- $\tau_r^G = 0.01s$ ve $\tau_r^K = 0.1s$ olmak üzere, $\beta^G = 1.1; 1.5; 3.0$ alınarak, β^G nin fıçı tipi helisin dinamik davranışı üzerindeki etkisi incelenmiş, yer değiştirme (u_x , u_z) ve dönme (Ω_x , Ω_z) ile çubuğun tutulu ucundaki kuvvet (T_z) ve moment (M_y) büyüklüklerinin zamana bağlı davranışları grafik olarak Şekil 3 de verilmiştir. β^G değerleri büyüdükçe hareketin hızla sönümlendiği, titreşim hareketinin genliğinin azaldığı ve kuazi-statik duruma yaklaştığı gözlenmiştir.
- $\tau_r^G = 0.01s$ ve $\beta^G = 3.0$ olmak üzere, $\tau_r^K = 0.0; 0.1s; 0.5s; 1.0s$ alınarak, τ_r^K nın fıçı tipi helisin dinamik davranışı üzerindeki etkisi incelenmiş, yer değiştirme (u_z) ve moment (M_y) büyüklüklerinin zamana bağlı davranışları grafik olarak Şekil 4 de verilmiştir. u_z ve M_y nin zamana bağlı grafikleri τ_r^K (0.0; 0.1s; 0.5s; 1.0s) değerlerine göre incelendiğinde, τ_r^K parametresinin değişiminin hareketi sönümleme eğiliminde olduğu, ancak hareketin davranışı üzerindeki etkisinin çok az olduğu gözlenmiştir.





Şekil 3. β^G nin dinamik davranış üzerindeki etkisi

(a) u_z yer değiştirmesi(b) M_y momentişekil 4. τ_r^K nin dinamik davranış üzerindeki etkisi

SONUÇLAR

Viskoelastik parametrelerin fıçı tipi viskoelastik helislerin dinamik davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Viskoelastik malzeme tanımlanırken kayma ve hacimsel şekil değiştirmelerin, sırasıyla, standart ve Kelvin modellerine uygun davranış gösterdiği kabul edilmiştir. Viskoelastik alan denklemleri karşıgelim ilkesi kullanılarak elde edilmiştir. Timoshenko çubuk kuramına dayalı karışık sonlu eleman algoritması kullanılarak Laplace uzayında problem çözülmüş ve sonuçlar geliştirilmiş Durbin dönüşüm algoritması kullanılarak zaman uzayına taşınmıştır. Viskoelastik davranışı tanımlayan parametrelerin dinamik davranış üzerindeki etkileri incelenmiş, kayma şekil değiştirmeleriyle ilgili viskozite arttıkça, dinamik davranışın/hareketin genliğinin hızla azaldığı ve daha kısa sürede statik değere yaklaştığı gözlenmiştir. İncelenen problemde, kayma şekil değiştirmelerinin viskoz etkisinin hacimsel şekil değiştirmelerle ilgili viskoz etkiye göre daha baskın olduğu söylenebilir.

Teşekkür-Yazarlar Yazarlar bu araştırmaı Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı kapsamında destekleyen TÜBİTAK'a (Proje No:111M308) ve İstanbul Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Birimi'ne (Proje No:38078) teşekkür ederler.

KAYNAKLAR

- [1] Y. Yamada, H. Takabatake, T. Sato, Effect of time-dependent material properties on dynamic response, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 8 (1974), 403–414. doi: 10.1002/nme.1620080216
- [2] T.M. Chen, The hybrid Laplace transform/finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 38 (1995), 509–522. doi: 10.1002/nme.1620380310
- [3] C.M. Wang, T.Q. Yang, K.Y. Lam, Viscoelastic Timoshenko beam solutions from Euler-Bernoulli solutions. *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*. 123 (1997), 746–748. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:7(746)
- [4] M. Enelund, L. Mähler, K. Runesson, B.L. Josefson, Formulation and integration of the standard linear viscoelastic solid with fractional order rate laws, *International Journal of Solids and Structures*. 36 (1999), 2417–2442. doi: 10.1016/S0020-7683(98)00111-5
- [5] A.Y. Aköz, F. Kadioğlu, The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 44 (1999), 1909 - 1932. doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990430)44:12<1909::AID-NME573>3.0.CO;2-P
- [6] F. Kadioğlu, A.Y.Aköz, The mixed finite element for quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic circular beams, *Structural Engineering and Mechanics*. 15 (2003), 735–752. doi: 10.12989/sem.2003.15.6.735
- [7] T. Kocatürk, M. Şimşek, Dynamic analysis of eccentrically prestressed viscoelastic Timoshenko beams under a moving harmonic load, *Computers and Structures*. 84 (2006), 2113–2127. doi: 10.1016/j.compstruc.2006.08.062
- [8] T. Kocatürk, M. Şimşek, Vibration of viscoelastic beams subjected to an eccentric compressive force and a concentrated moving harmonic force, *Journal of Sound and Vibration*. 291 (2006), 302–322. doi: 10.1016/j.jsv.2005.06.024
- [9] G.S. Payette, J.N. Reddy, Nonlinear quasi-static finite element formulations for viscoelastic Euler-Bernoulli and Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 26 (2010), 1736–1755. doi: 10.1002/cnm.1262
- [10] B. Temel, Transient analysis of viscoelastic helical rods subject to time-dependent loads, *International Journal of Solids and Structures*. 41 (2004), 1605–1624. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2003.09.054
- [11] B. Temel, F.F. Çalım, N. Tütüncü, Quasi-static and dynamic response of viscoelastic helical rods, *Journal of Sound and Vibration*. 271 (2004), 921–935. doi: 10.1016/s0022-460x(03)00760-0
- [12] N. Eratlı, H. Argeso, F.F. Çalım, B. Temel, M.H. Omurtag, Dynamic analysis of linear viscoelastic cylindrical and conical helicoidal rods using the mixed FEM, *Journal of Sound and Vibration*. 333 (2014), 3671–3690. doi: 10.1016/j.jsv.2014.03.017
- [13] H. Dubner, J. Abate, Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform, *Journal of the ACM*. 15 (1968), 115–123. doi: 10.1145/321439.321446
- [14] F. Durbin, Numerical inversion of Laplace transforms: An efficient improvement to Dubner and Abate's method, *Computer Journal*. 17 (1974), 371–376. doi: 10.1093/comjnl/17.4.371
- [15] G. Narayanan, *Numerical Operational Methods in Structural Dynamics*, Doktora Tezi, University of Minnesota, 1980.
- [16] I.R. Shames, F.A. Cozarelli, *Elastic and Inelastic Stress Analysis*, CRC Press Inc., 1997.

- [17] Y. Mengi, H. Argeso, A unified approach for the formulation of interaction problems by the boundary element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 66 (2006), 816-842. doi: 10.1002/nme.1585
- [18] B. Baranoglu, Y. Mengi, The use of dual reciprocity boundary element method in coupled thermoviscoelasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 196 (2006), 379-392. doi: 10.1016/j.cma.2006.07.003